L'ENSENYAMENT DE LA TRIGONOMETRIA: ARISTARC DE SAMOS (310-230 aC)

M. Rosa Massa Esteve
Coordinadora del Grup de Treball d'Història de les Matemàtiques de l'Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i l'Aprenentatge de les Matemàtiques
Centre per a la Recerca d'Història de la Tècnica. Universitat Politècnica de Catalunya

Paraules clau: *trigonometria, Aristarc de Samos*, *geometria*, Sobre les mides i distàncies del Sol i la Lluna, *ensenyament*.

Teaching trigonometry. Aristarchus of Samus (310-230 BC)

Summary: *History can be useful for science teaching. In this article I analize one proposition of Aristharcus'* On Sizes and Distances of the Sun and Moon *as an example for using it in secondary school when trigonometry is introduced in the classroom. Aristarchus used theorems of geometry to approximate the sinus of small angles.*

Key words: *trigonometry, Aristarchus of Samus*, *Geometry*, On Sizes and Distances of the Sun and Moon, *teaching*.

Introducció

Les aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica són múltiples i depenen de molts factors. Per una banda, es requereixen molts esforços per part dels professors pel que fa a formació i a investigació; per l'altra, es necessiten materials adequats per no caure en el parany de l'anècdota fàcil sense cap contingut matemàtic. De fet, és una empresa molt difícil i costosa per a la societat. Tanmateix, les múltiples possibilitats d'utilització de la història de la matemàtica, com a recurs implícit i explícit, són eines que permeten millorar l'ensenyament de la matemàtica i la formació integral de l'alumnat (Massa, 2003).

La història de la matemàtica, com a recurs implícit, pot ser emprada en la fase de disseny d'una programació, per seleccionar context, problemes i fonts auxiliars, tenint en compte sempre que el més rellevant per a l'ensenyament és la gènesi dels problemes, les proves que van afavorir el desenvolupament d'una idea o d'un concepte. La clarificació d'aquest desenvolupament de les idees i les nocions pot servir també per a motivar la resolució de problemes actuals. L'evolució històrica d'un concepte matemàtic ens pot mostrar, doncs, les dificultats d'aprenentatge que pot tenir l'alumne i, alhora, ens pot indicar un possible camí per a la docència d'aquest concepte.

La història de la matemàtica també pot ésser utilitzada explícitament, sigui en els treballs de recerca dels alumnes de segon de batxillerat, en els crèdits variables de disseny propi o bé en la celebració de jornades o centenaris, tot afavorint una formació més integral de l'alumnat. Però, sobretot, la història pot ésser utilitzada per a introduir o per a assolir millor determinats conceptes matemàtics mitjançant l'anàlisi de textos històrics seleccionats.

Aquest article fa referència a aquest últim enfocament i forma part d'un projecte més ampli del Grup d'Història de les Matemàtiques[1] de l'Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) que investiga el naixement i desenvolupament de la trigonometria dins de les diferents civilitzacions. L'objectiu del projecte és seleccionar textos històrics rellevants dins la història de la trigonometria que ajudin l'alumne a assolir millor els conceptes trigonomètrics. La investigació se centra en el període que abasta des de l'antiguitat fins a l'època de Regiomontanus. Els textos històrics analitzats fins ara són els *Elements* d'Euclides (300 aC), l' *Almagest* de Ptolemeu (90 dC-168 dC), *Traité du quadrilatère* de Nassir al-Tusi (1201-1274) i *De triangulis Omnimodis* de Regiomontanus (1436-1476).[2] Aquí tractarem d'un llibre d'astronomia d'Aristarc de Samos (310-230 aC) en el qual es desenvolupen procediments geomètrics per a aproximar raons que avui identificaríem amb sinus d'angles petits. El text, que ha estat experimentat amb alumnes de primer de batxillerat, permet remarcar fonamentalment dues idees: l'aplicació de la trigonometria al càlcul de distàncies i el lligam de la trigonometria amb la seva eina base: la geometria.

Idees trigonomètriques a l'antiguitat

Com precisa Villuendas (1979: 40), cap historiador gosa fixar els inicis del desenvolupament de la ciència trigonomètrica. La trigonometria va sorgir, segurament, a través de diferents fils conductors i associada a d'altres disciplines com ara l'aritmètica, la geometria i, més tard, l'àlgebra.

Des del punt de vista cronològic, podem dir que la matemàtica «babilònica» (aprox. 1500 aC) va ser transmesa pels escribes i va ser utilitzada bàsicament per al càlcul pràctic. Els babilònics escrivien sobre tauletes d'argila en llenguatge cuneïforme. Entre aquestes n'hi ha moltes de numèriques (taules de multiplicació, taules de recíprocs, etc.). Les tècniques que feien servir per a la construcció d'aquestes taules constituïen el nexe entre els càlculs i la realitat administrativa i d'enginyeria. L'ensenyament de les matemàtiques corresponia als escribes, que eren capaços de calcular àrees de camps i volums de canals; van deixar escrites moltes tècniques de resolució de problemes, especialment en el camp de l'àlgebra. Tanma-

1. El Grup d'Història es va formar el curs 1999-2000 i pertany a l'ICE de la Universitat de Barcelona. Els membres del grup són M. Àngels Casals Puit (IES Joan Corominas), Iolanda Guevara Casanova (IES Badalona VII), Paco Moreno Rigall (IES XXV Olimpíada) i Fàtima Romero Vallhonesta (Inspecció de Barcelona-Comarques. Departament d'Educació).

2. Vegeu els articles ja publicats sobre l'*Almagest* (Massa i Romero, 2003) i sobre *De Triangulis Omnimodis* (Guevara i Casals, 2003).

teix, sembla que els babilònics no tenien un concepte quantificable d'angle i, per tant, res similar a la trigonometria.[3] Se solen destacar les ternes pitagòriques que es trobaven calculades a les tauletes i la resolució de triangles rectangles. Segons Hoyrup (2002: 227-228) i Caveing (1994: 170) res semblant a les taules de cordes; mentre que tant Zeller (1944: 2) com Villuendas (1979: 40) remarquen que podien haver construït taules de cordes encara que no se n'hagin trobat ja que coneixien les tècniques per a fer-les i atès que les seves contribucions al càlcul de dades astronòmiques és molt important.

El que podem explicar sobre la matemàtica egípcia és quelcom diferent ja que s'hi troben alguns textos sobre tècniques de construcció de grans monuments, com ara les piràmides, els obeliscs i els colossos, que poden relacionar-se amb el que avui anomenem *trigonometria*. La majoria de les seves tècniques matemàtiques es troben escrites sobre papirs.[4] Així, podem citar el papir Rhind (1650 aC), el papir de Moscou (1850 aC), el papir Reisner (1880 aC), el papir de Berlín (1850 aC) i el papir Kahun (1850 aC). Per la relació que té amb la trigonometria ens referirem al papir Rhind,[5] en el qual l'escriba explica que es tracta d'una còpia d'un altre de dos-cents anys abans on s'intentava fer un recull del saber d'aquell moment. El papir Rhind consta de vuitanta-set problemes matemàtics de contingut aritmètic, algebraic i geomètric.[6] Els egipcis eren capaços de calcular les àrees de triangles, rectangles i trapezoides de la manera usual actual, i també de calcular la inclinació que tindria una piràmide de base i altura donades. Així, en el problema número cinquanta-sis del papir Rhind es busca la relació entre l'altura de la piràmide i la meitat del costat de la base: l'escriba l'anomena el *seqt* de la piràmide; nosaltres en diríem la cotangent de l'angle d'inclinació d'un costat amb la base. En els problemes del número cinquanta-set al número seixanta continua buscant el *seqt* i, a més, emprant piràmides de costats proporcionals, comprova que es conserva el *seqt*. Aquesta és l'única relació que hem trobat que es pot interpretar amb llenguatge trigonomètric.

Aristarc de Samos (310-230 aC)

No hem d'oblidar la relació estreta que van tenir els inicis de la trigonometria amb l'astronomia. És per això que tractarem d'un llibre d'astronomia on es resolien problemes

3. Més informació sobre la matemàtica babilònica a Hoyrup (2002).

4. Amb el descobriment de la pedra de Rosetta el 1799 el problema d'interpretar el llenguatge egipci va ser resolt. Els egipcis tenien tres estils diferents: jeroglífic (objectes, plantes, animals...), hieràtic (utilitzat pels sacerdots) i demòtic (utilitzat pel poble). Les fonts matemàtiques que es conserven estan escrites en estil hieràtic. Més informació a Caveing (1994: 237-404).

5. El papir Rhind es troba ara al Museu Britànic de Londres; el seu nom deriva de l'anglès A. H. Rhind, que el va comprar a Luxor el 1858.

6. Existeix una transcripció amb notes del papir Rhind de 1877, 1923 i 1927. En aquest papir trobem nombrosos problemes sobre la divisió de pans entre homes en parts iguals i desiguals. Uns altres problemes són per determinar les quantitats de grans necessàries per fer pa. Però hi ha problemes que no es refereixen a objectes específics, com per exemple el número vint-i-quatre, que tracta de trobar un nombre que sumat a la seva setena part doni dinou. L'escriba utilitza el mètode de falsa posició, o sigui prova un nombre i compara la solució amb el dinou. Veient aquest tipus de problemes hom pot creure que el papir Rhind era un llibre de mà amb exercicis per a joves estudiants (Maor, 1998).

geomètrics considerant conegudes algunes relacions —que per nosaltres són trigonomètriques— entre angles i costats d'un triangle. Es tracta de l'obra *Sobre les mides i distàncies del Sol i la Lluna* (287 aC) d'Aristarc de Samos.

Segons Stahl (1971: 246), Aristarc va ser anomenat *el matemàtic* i en l'època era citat com un dels pocs homes que tenien un profund coneixement de totes les branques de la ciència: geometria, astronomia, música... Que Aristarc era un geòmetra molt capaç queda provat en el treball d'astronomia esmentat. Va escriure també sobre visió, llum i colors. Aristarc deia que els colors eren «formes estampant l'aire amb impressions de com elles mateixes eren». A més, sembla que Aristarc va ser el primer en presentar la hipòtesi heliocèntrica. Arquimedes, contemporani seu, ho afirma en un passatge de la seva obra l'*Arenari* (216 aC), i també el cita Copèrnic (Stahl, 1971: 247). De fet, Aristarc suposa que les esferes de les estrelles i el Sol romanen en l'espai sense moure's i que la Terra gira al voltant del Sol. Aristarc compara l'esfera de les estrelles fixes amb l'òrbita de la Terra. Tanmateix, l'obra que expliquem a continuació devia ser anterior ja que no presenta la hipòtesi heliocèntrica.

La seva obra *Sobre les mides i distàncies del Sol i la Lluna* es trobava en un recull de textos anomenat *Petita Astronomia* juntament amb l'*Optica* d'Euclides, les *Sphaericae* de Teodosio i d'altres (Heath, 1913: 317-321). Constituïa un curs d'introducció a l'astronomia. Es troba escrita en grec i en àrab. Una traducció del grec a l'àrab la va fer Luqa al-Balabakki, que va morir el 912. Més tard, al-Tusi va fer una recensió de tots els llibres de *Petita Astronomia*. La primera edició de l'obra va ser una traducció llatina de George Valla el 1448 i, a partir d'aquesta data, es van succeir diverses traduccions: Commandino (1572), Wallis (edició grega, 1688), Fortia d'Urban (1810). L'edició de Heath (1913) que hem treballat és una traducció anglesa a partir d'un manuscrit grec del Vaticà, del text de Wallis i de la traducció francesa de Fortia d'Urban.

En la seva obra, Aristarc parteix de sis hipòtesis sobre les mides i distàncies dels astres i mitjançant divuit proposicions demostra tres tesis. Anticipant-se als mètodes trigonomètrics posteriors, Aristarc va ser el primer en desenvolupar procediments geomètrics per a aproximar els sinus d'angles petits. Treballa amb angles expressats com a fraccions d'angle recte i expressa els sinus com a raons dels costats dels triangles a fi de determinar els límits entre els quals es troba el valor que busca. Treballa amb raons trigonomètriques sense dir-ho ja que en aquell temps no existien les expressions actualment conegudes com a sin α... i, a més, utilitza resultats trigonomètrics com si els conegués.

Les hipòtesis de les quals parteix són (Heath, 1913: 353):

1. La Lluna rep la llum del Sol.
2. La Terra és com un punt al centre de l'esfera en la qual es mou la Lluna.
3. Quan la Lluna se'ns mostra partida en dues parts, el gran cercle que separa la foscor i la claror de la Lluna s'inclina cap a la nostra visió.
4. Quan la Lluna se'ns mostra partida per la meitat, llavors la mateixa Lluna s'allunya del Sol menys d'una quarta part (90°) en una trentena part d'un quadrant (o sigui, 3°).
5. L'amplada de l'ombra de la Terra se suposa com dues llunes.
6. La Lluna subtendeix una quinzena part d'un signe del zodíac (o sigui, una quinzena part de 30°).

Diu Aristarc que amb aquestes hipòtesis pot provar que[7] la distància al Sol des de la Terra (AB) és més gran que divuit vegades, però més petita que vint vegades, la distància a la Lluna des de la Terra (CB) (proposició 7) (vegeu figura 1).

De fet demostra que $1/18 > \sin 3° = CB : AB > 1/20$. Demostrarem només la primera desigualtat: $1/18 > CB : AB$, o sigui $AB > 18CB$.

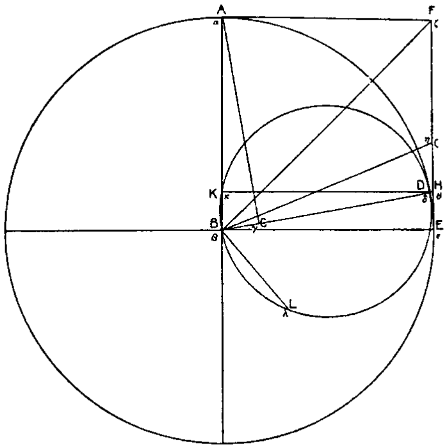

FIGURA 1

Demostració

Si A és el centre del Sol, B el centre de la Terra i C el centre de la Lluna quan se'ns mostra partida per la meitat, llavors CB representa la distància a la Lluna des de la Terra i AB representa la distància al Sol des de la Terra. Segons la hipòtesi número 4, l'angle BAC és de 3°, llavors l'angle ABC que mesura la distància de la Lluna al Sol és de 87° ja que BCA és recte. Tot seguit Aristarc dibuixa una circumferència de centre B i radi AB i estudia el problema en BHE, triangle semblant construït de costats perpendiculars al donat, o sigui que l'angle DBE val 3°. A més completa el quadrat de costats AB, BE amb els costats AF i FE.

Si l'angle FBE, doncs, és igual a 45° i l'angle GBE la meitat, o sigui 90/4, llavors la raó entre els dos angles GBE i DBE, que val 3, dóna 15 és a 2.

Diu Aristarc que, com que sabem que la raó entre els costats oposats a aquests angles és més gran que la raó entre ells, podem escriure que:

$$GE : HE > (GBE) : (DBE) = 15 : 2$$ [8]

7. També diu que pot provar que el diàmetre del Sol té aquesta mateixa raó respecte al diàmetre de la Lluna, i que el diàmetre del Sol té una raó respecte al diàmetre de la Terra més gran que la raó de 19 a 3 però més petita que la raó de 43 a 6 (Heath, 1913: 354).

8. Aquí Aristarc suposa que es compleix $\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B > A : B$, essent $A > B$ i ambdós més petits de 90º.

Ara, en aplicar el teorema de Pitàgores al triangle isòsceles (BE = FE) format per la meitat del quadrat, es compleix que $FB^2 = 2\,BE^2$. A continuació aplica proporcions als triangles semblants i arriba a la conclusió que $FG^2 = 2\,GE^2$.

L'estratègia que usa tot seguit és utilitzar la raó 50 : 25 = 2 > 49 : 25. Llavors escriu:

$$FG^2 : GE^2 = 2 > 49 : 25$$

En treure l'arrel quadrada, queda FG : GE > 7 : 5. En compondre la raó (*componendo*) FG + GE = F E (Euclides, 1956: 114-115), resulta:

$$FE : GE > 12 : 5 = 36 : 15$$

Però com que abans havia demostrat que GE : HE > 15 : 2, en fer el producte de les dues raons (*ex aequali*), FE : GE amb GE : HE, resulta:

$$FE : HE > 36 : 2 = 18 : 1$$

O sigui que FE > 18 HE, però com que FE = BE (costats del quadrat), llavors BE > 18 HE. Sabem també que BH, que és la hipotenusa, és més gran que BE, que és un catet, llavors:

$$BH > 18\,HE$$

Ara escriu aquest resultat en el triangle semblant a aquest, és a dir, la demostració que ha fet en el triangle BHE l'expressa en el triangle ortogonal ABC mitjançant la proporció BH : HE = AB : CB i conclou que AB > 18 CB.

O sigui que la distància al Sol des de la Terra (AB) és més gran que divuit vegades la distància a la Lluna des de la Terra (CB).

Cal remarcar que el mètode d'Aristarc és correcte però la demostració es basa en l'angle de 87º de la hipòtesi quarta que ha obtingut mitjançant observació i que en realitat val 89º 50' (Boyer, 1968: 212).

Conclusió

L'ús de casos històrics és un dels recursos que es pot utilitzar per a millorar la transmissió i l'assoliment dels continguts matemàtics i també per a actuar de revulsiu en aquells casos en què l'alumne no troba motivació en les matemàtiques.

En el cas de la trigonometria, a l'hora d'utilitzar aquest text podem presentar el personatge, situar-lo en l'època i intentar explicar les idees astronòmiques del moment. L'exemple que acabem de demostrar és gratificant tant pel que aprèn l'alumne com per l'interès que desperta en relacionar la geometria i la trigonometria amb una qüestió cabdal per a la humanitat com és conèixer millor el nostre univers. Més enllà de les idees matemàtiques l'interès d'aquesta obra d'Aristarc rau també en la presentació d'un mètode rigorós de càlcul de distàncies relatives Terra-Sol i Terra-Lluna que va contribuir a un major coneixement astronòmic.

Bibliografia

BOYER, C. (1968). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

CAVEING, M. (1994). *Essai sur le savoir mathématique. Dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*. Lilla: Presses Universitaires de Lille.

EUCLIDES (1956). *The Elements*. Vol. 2. Nova York: Dover. [Edició anglesa de T. L. HEATH]

GUEVARA, I.; CASALS, M. A. (2003). «Resolució de triangles per mètodes geomètrics i mètodes algebraics, en l'obra *De triangulis omnimodis* (1464) de Regiomontanus (1436-1476)». A: BATLLÓ, J. [*et al.*] [ed.]. *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, 191-199.

HEATH, T. L. (1913). *Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus*. Oxford: Clarendon Press.

HOYRUP, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. Nova York: Springer-Verlag.

MAOR, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton: Princeton University Press.

MASSA, M. R. (2003). «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica». *Biaix*, 21, 4-9.

MASSA, M. R.; ROMERO, F. (2003). «De la geometria a la trigonometria: El teorema de Ptolemeu». A: BATLLÓ, J. [*et al.*] [ed.]. *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, 153-159.

NEUGEBAUER, O. (1969). *The exact sciences in Antiquity*. Nova York: Dover.

STAHL, W. H. (1971). «Aristarchus of Samos». A: GILLISPIE, C. C. [ed.]. *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York, 246-250.

VILLUENDAS, M. V. (1979). *La trigonometria europea en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Muad «El Kitab mayhulat»*. Barcelona: Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas Letras.

ZELLER, Sister Maria Claudia (1944). *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. Michigan: Ann Astor: University of Michigan.